

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 20.04. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

(a) Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

(1) $\neg(X \rightarrow (Y \rightarrow X))$;

(2) $(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow Y$

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind:

(1) $X \rightarrow (Y \wedge Z)$ und $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z)$;

(2) $(X \wedge Y \wedge Z) \rightarrow Q$ und $X \rightarrow (Y \rightarrow (Z \rightarrow Q))$;

(3) $(X \leftrightarrow \neg Y) \vee \neg X$ und $(X \wedge Y) \rightarrow \neg(Z \rightarrow X)$.

Aufgabe 2

10 Punkte

(a) Konstruieren Sie eine Formel $\varphi(X_0, X_1, X_2)$, so dass für alle dazu passenden Interpretationen $\mathcal{I} : \{X_0, X_1, X_2\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt, dass sich durch Ändern jedes Wahrheitswertes $\mathcal{I}(X_i)$ auch der Wahrheitswert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ ändert.

(b) Kann $\varphi(X_0, X_1, X_2)$ so gewählt werden, dass $\{h_\varphi\}$ funktional vollständig ist?

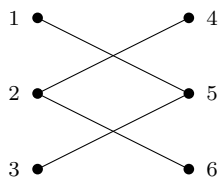
(c) Geben Sie für jedes n eine Formel $\varphi_n(X_0, \dots, X_{n-1})$ mit der Eigenschaft aus (a) an.

Aufgabe 3

10 Punkte

Jeden ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \dots, n$ identifizieren wir mit einer aussagenlogischen Interpretation in folgender Weise: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

(a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die ausdrückt, dass der Graph die folgende Gestalt hat:



(b) Konstruieren Sie zunächst für $n = 4$ und dann für beliebige n Formeln φ_n , die ausdrücken, dass der Graph zusammenhängend ist.

(c) Konstruieren Sie für beliebige n Formeln φ_n , die ausdrücken, dass der Graph einen Hamiltonkreis enthält.