

## 1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 20.04. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

### Aufgabe 1

10 Punkte

(a) Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

(1)  $\neg(X \rightarrow (Y \rightarrow X))$ ;

(2)  $(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow Y$

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind:

(1)  $X \rightarrow (Y \wedge Z)$  und  $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z)$ ;

(2)  $(X \wedge Y \wedge Z) \rightarrow Q$  und  $X \rightarrow (Y \rightarrow (Z \rightarrow Q))$ ;

(3)  $(X \leftrightarrow \neg Y) \vee \neg X$  und  $(X \wedge Y) \rightarrow \neg(Z \rightarrow X)$ .

### Aufgabe 2

10 Punkte

(a) Konstruieren Sie eine Formel  $\varphi(X_0, X_1, X_2)$ , so dass für alle dazu passenden Interpretationen  $\mathcal{I} : \{X_0, X_1, X_2\} \rightarrow \{0, 1\}$  gilt, dass sich durch Ändern jedes Wahrheitswertes  $\mathcal{I}(X_i)$  auch der Wahrheitswert  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$  ändert.

(b) Kann  $\varphi(X_0, X_1, X_2)$  so gewählt werden, dass  $\{h_\varphi\}$  funktional vollständig ist?

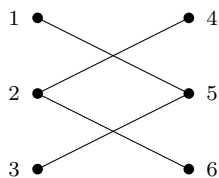
(c) Geben Sie für jedes  $n$  eine Formel  $\varphi_n(X_0, \dots, X_{n-1})$  mit der Eigenschaft aus (a) an.

### Aufgabe 3

10 Punkte

Jeden ungerichteten Graphen mit Knoten  $1, \dots, n$  identifizieren wir mit einer aussagenlogischen Interpretation in folgender Weise: Jedem Paar  $i < k$  von Knoten wird eine Variable  $X_{ik}$  zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen  $i$  und  $k$  gibt.

(a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel  $\varphi$  an, die ausdrückt, dass der Graph die folgende Gestalt hat:



(b) Konstruieren Sie zunächst für  $n = 4$  und dann für beliebige  $n$  Formeln  $\varphi_n$ , die ausdrücken, dass der Graph zusammenhängend ist.

(c) Konstruieren Sie für beliebige  $n$  Formeln  $\varphi_n$ , die ausdrücken, dass der Graph einen Hamiltonkreis enthält.